▶ $f(x)=(1+x)^a$ Διωνυμική Συνάρτηση

$(=e^{a\log(1+x)})$, πρέπει $x>-1$.

Αν $a>0$, τότε $\lim_{x\to -1^+} f(x)=0$, εφόσον $\lim_{x\to -1^+}\log(1+x)=-\infty \overset{a>0}{\Rightarrow} \lim_{x\to -1^+} a\log(1+x)=-\infty$,

ενώ $\lim_{x\to -\infty} e^x=0$.

Έτσι, όταν $a>0$ η f επεκτείνεται στο -1 κατά συνεχή τρόπο, θέτοντας $f(-1)=0$.

$$f(x)=(1+x)^a$$
$$f'(x)=a(1+x)^{a-1}$$
$$f''(x)=a(a-1)(1+x)^{a-2}$$
$$f'''(x)=a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3}$$

κ.ο.κ.

$$f^{(k)}(x)=a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-k+1)(1+x)^{a-k}=\binom{a}{k}k!\,(1+x)^{a-k}$$

$$f(0)=1$$
$$f'(0)=a$$
$$f''(0)=a(a-1)$$
$$f'''(0)=a(a-1)(a-2)$$

κ.ο.κ.

$$f^{(k)}(0)=a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-k+1) \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

Θέτοντας $\binom{a}{k}=\dfrac{a(a-1)(a-2)\cdot\ldots\cdot(a-k+1)}{k!}$

$$T_{n,f,0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}x^k$$

<u>Παρατήρηση:</u> Αν $a\in\mathbb{N}$, τότε για $k>a$: $\binom{a}{k}=0$.

Έτσι, για $n>a$: $T_{n,f,0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}x^k=(1+x)^a$

Είναι ακριβώς το διώνυμο του Νεύτωνα.

Στα παρακάτω υποθέτουμε ότι $a\notin\mathbb{N}$.

Θ.δ.ο. $T_{n,f,0}(x)\xrightarrow{n\to+\infty} f(x)$ για $-1<x<1$.

<u>Σταθεροποιούμε x με $-1<x<1$.</u>

Από τη μορφή Cauchy του υπολοίπου Taylor, υπάρχει ξ στο διάστημα με άκρα τα $0,x$ ώστε:

$$R_{n,\rho,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \cdot x = \frac{a(a-1)(a-2)\cdot\ldots\cdot(a-n)}{n!}(1+\xi)^{a-(n+1)}(x-\xi)^n \cdot x =$$

$$= \frac{a(a-1)(a-2)\cdot\ldots\cdot(a-n)}{n!}\left(\frac{x-\xi}{1-\xi}\right)^n (1+\xi)^{a-1} x.$$

Παρατηρούμε ότι για $-1<x<1$ ισχύει:

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| = \begin{cases} \xrightarrow{x>0} \dfrac{x-\xi}{1+\xi} \le \dfrac{x}{1+\xi} \le x = |x| < 1 & (0 \quad \xi \quad x \quad 1) \\ \xrightarrow{x>0} \dfrac{\xi-x}{1+\xi} \le -x = |x| & (-1 \quad x \quad \xi \quad 0) \end{cases}$$

$$\left(\frac{\xi-x}{1+\xi} \le -x \iff \xi - x \le (1+\xi)(-x) \iff \xi - x \le -x - \xi x \iff (1+\xi)x < 0 \text{ που ισχύει}\right)$$

Έτσι, $$|R_{n,\rho,0}(x)| = \left|\frac{a(a-1)(a-2)\cdot\ldots\cdot(a-n)}{n!}\right| \left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right|^n (1+\xi)^{a-1} \cdot |x| \le$$

$$\le \left|\frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n)}{n!} x^n\right| \max\{1, (1+x)^{a-1}\} |x|$$

Αρκεί, δείχνοντας $b_n = \left|\frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n)}{n!} x^n\right|$ αν δ.ο. $b_n \to 0$.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left| \frac{\dfrac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n)(a-n-1)}{(n+1)!} x^{n+1}}{\dfrac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n)}{n!} x^n} \right| = \left|\frac{(a-n-1)}{(n+1)} x\right| \xrightarrow{n\to+\infty} |x| < 1$$

Άρα $b_n \to 0$. Επομένως, $R_{n,\rho,0}(x) \to 0$.

Έτσι, $(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \quad \forall |x|<1$.

▶ Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Απόδειξη:

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$y = \pi/4 - x \to x = \pi/4 - y$

για $x=0 \Rightarrow y = \pi/4$

για $x = \pi/4 \Rightarrow y = 0$

$dx = -dy$

$I = \int_{\pi/4}^{0} -\log\left(1+\tan\left(\pi/4 - y\right)\right)dy = \int_0^{\pi/4} \log\left(1+\tan\left(\pi/4-y\right)\right)dy =$

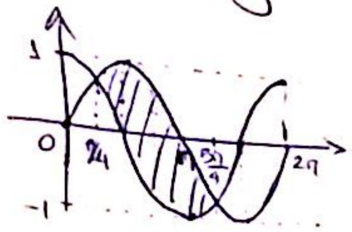
$= \int_0^{\pi/4} \log\left(1+\frac{\tan\pi/4 - \tan y}{1+\tan\pi/4 \tan y}\right)dy = \int_0^{\pi/4}\log\left(1+\frac{1-\tan y}{1+\tan y}\right)dy =$

$= \int_0^{\pi/4}\log\left(\frac{2}{1+\tan y}\right)dy = \int_0^{\pi/4}\left[\log 2 - \log(1+\tan y)\right]dy =$

$= \int_0^{\pi/4}\log 2\,dy - \int_0^{\pi/4}\log(1+\tan y)\,dy = \frac{\pi}{4}\log 2 - I \to I = \frac{\pi}{4}\log 2 - I \Rightarrow$

$2I = \frac{\pi}{4}\log 2 \Rightarrow I = \frac{\pi}{8}\log 2.$

▶ Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$ στο $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$.

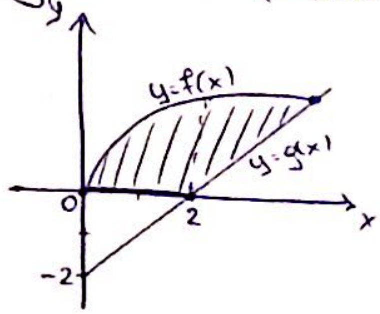


Εύκολα, δείχνουμε ότι για $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ ισχύει: $\sin x \geq \cos x$.

$E = \int_{\pi/4}^{5\pi/4}\left[\sin x - \cos x\right]dx = \left[-\cos x - \sin x\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} =$

$= \left(-\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4}\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$

▶ Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=x-2$ και τον θετικό ημιάξονα Ox.



$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

$x-2=\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\geq 0 \\ (x-2)^2=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x^2-4x+4=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x\geq 2 \\ \cancel{x=1} \\ \text{ή} \\ \boxed{x=4} \end{array}$

Για $0\leq x<2$
$g(x)\leq 0$

$E = \int_0^2 (f(x)-0)dx + \int_2^4 (f(x)-g(x))dx =$

$= \int_0^2 \sqrt{x}\,dx + \int_2^4 \left(\sqrt{x}-(x-2)\right)dx =$

$= \left[\frac{2}{3}x^{2/3}\right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^{2/3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^4 = \dots$